3. Séries com termos positivos

3.1 Teste da Integral

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ tal que $x_n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Logo $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ cresce, portanto

$$\boxed{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge se e só se } \{s_n\} \text{ é limitada}}$$

Lembrete 3.1.1 — Integral Imprópria. Suponha que $\int_a^b f(x)dx$ existe para cada $t \geq a$. Se $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ existir, denotaremos

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.}$$

e diremos que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge*. Caso contrário, se $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$ não existir, diremos que $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *diverge*.

Teorema 3.1.2 — Teste da Integral. Seja $f : [p;\infty) \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}$, uma função contínua, positiva e decrescente e $x_n = f(n), n \geq p$. Então

$$\boxed{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge} \iff \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ converge,}}$$

e

$$\boxed{\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ diverge} \iff \int_p^{\infty} f(x)dx \text{ diverge,}}$$

Demonstração. Observe que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge $\iff$ $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ converge. Considere $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$.

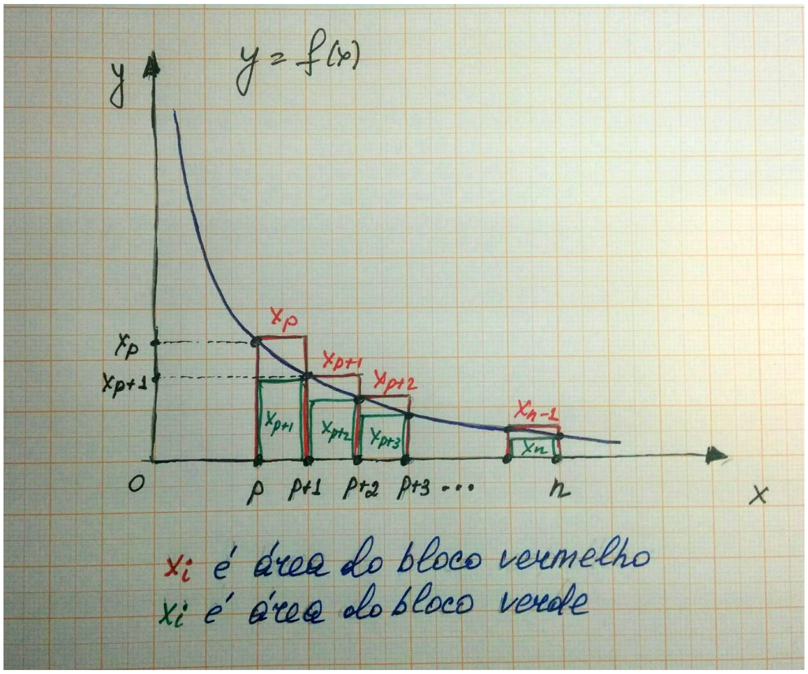

Figure 3.1: Teste de integral

Analisando Figura 3.1, obtemos

$$x_{p+1}+x_{p+2}+\cdots+x_n \leq \int_p^n f(x)dx, \tag{3.1}$$

$$x_p+x_{p+1}+\cdots+x_{n-1} \geq \int_p^n f(x)dx. \tag{3.2}$$

1) Primeiro suponha que $\int_p^\infty x_n$ converge, assim (3.1) implica

$$\sum_{p+1}^{n} x_k \leq \int_p^n f(x)dx \leq \int_p^\infty f(x)dx,$$

desde que $f(x) \geq 0$. Ou seja

$$s_n = x_p + \sum_{p+1}^{n} x_n \leq x_p + \int_p^\infty f(x)dx = M,$$

e $s_n \leq M$. Portanto $\{s_n\}_p^\infty$ é limitada superiormente. Além disso $s_{n+1} = s_n + x_{n+1}$, pois $x_n \geq 0$, portanto $\{s_n\}$ cresce. Isto implica que $\{s_n\}$ converge e $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge.

2) Agora suponha que $\int_p^\infty x_n$ diverge. Assim $\int_p^n f(x)dx \to \infty$, quando $n \to \infty$, pois $f(x) \geq 0$. Formula (3.2) implica que

$$\int_p^n f(x)dx \leq \sum_{k=p}^{n-1} x_k = s_{n-1},$$

ou seja $s_n \to \infty$, se $n \to \infty$. Logo $\sum_{n=1}^\infty x_n$ diverge. ∎

■ **Exemplo 3.1** Séries harmônicas generalizadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Se $\alpha < 0$, série diverge pelo Critério do termo geral, pois $\dfrac{1}{n^{\alpha}} \to \infty$ quando $n \to \infty$.

b) Seja $\alpha = 0$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

c) Seja $\alpha > 0$. Suponha que $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$, assim $f(x)$ é contínua, positiva, decrescente em $[1,\infty)$ e $f(n) = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$. No caso $\alpha \neq 1$ temos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & \alpha < 1 \\ -\dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Pelo Teorema 3.1.2, a série diverge para $0 < \alpha < 1$ e converge para $\alpha > 1$. No caso $\alpha = 1$ série é harmônica, portanto é divergente.

Finalmente, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ diverge para todos $\alpha \leq 1$, e converge para todos $\alpha > 1$.

■ **Exemplo 3.2** Estude a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Solução. Seja $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$. A função $f(x)$ é positiva, contínua, decrescente. Se $\alpha \neq 1$, obtemos

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \left| \begin{array}{l} \ln x = u, \\ du = \dfrac{1}{x} dx. \end{array} \right| = \int \frac{du}{u^{\alpha}} = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\ln x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Portanto

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \lim_{b\to\infty} \frac{(\ln b)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \\ \infty, \quad \alpha < 1. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, temos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} \ln\ln x\big|_2^b = \lim_{b\to\infty} (\ln\ln b - \ln\ln 2) = \infty.$$

Resumindo, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge se $0 < \alpha < 1$. ;-)

3.2 Estimativa da soma de Série

Seja $f(x):[p,\infty)\to\mathbb{R}$ uma função contínua, positiva, decrescente e $f(n)=x_n$, para todo $n\geq p$. Seja $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ convergente. Temos

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots=\sum_{n=1}^{p}x_n+\sum_{n=p+1}^{\infty}x_n=s_p+R_p,$$

com $R_p=\sum_{p+1}^{\infty}x_n$. A soma s_p e aproximação da S, então

$$R_p=S-s_p=x_{p+1}+x_{p+2}+\cdots=\sum_{n=p+1}^{\infty}x_n$$

é o resto R_p é o erro de cálculo da S. Analisando Figura 3.1, temos

$$R_p=x_{p+1}+x_{p+2}+\cdots\leq\int_p^{\infty}f(x)dx,$$
$$R_p=x_{p+1}+x_{p+2}+\cdots\geq\int_{p+1}^{\infty}f(x)dx.$$

Portanto

$$\int_{p+1}^{\infty}f(x)dx\leq R_p\leq\int_p^{\infty}f(x)dx,\quad \text{ou} \tag{3.3}$$
$$s_p+\int_{p+1}^{\infty}f(x)dx\leq S\leq s_p+\int_p^{\infty}f(x)dx. \tag{3.4}$$

■ **Exemplo 3.3** Aproxime a soma da série

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ converge pelo Teorema 3.1.2. De fato, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ é função contínua, positiva, decrescente em $[1,\infty]$ e $f(n)=\dfrac{1}{1+n^2}$. Temos

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_1^b=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},$$

assim série converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{1+1}+\frac{1}{4+1}+\frac{1}{9+1}+R_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+R_3=\frac{4}{5}+R_3.$$

Agora pelo (3.3) temos

$$\frac{\pi}{2}-\arctan 4=\int_4^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\leq R_3\leq\int_3^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\arctan 3.$$

Por outro lado, pelo (3.4) temos

$$\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}-\arctan 4\leq S\leq\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}-\arctan 3.$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+R_4=\frac{205}{144}+R_4.$$

Assim pelo (3.3)
$$\frac{1}{5}=\int_5^{\infty}\frac{dx}{x^2}\le R_4\le\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{4},$$

e pelo (3.4)
$$0,2+\frac{205}{144}\le S\le\frac{205}{144}+0,25.$$

3.3 Teste de comparação (TC)

■ **Exemplo 3.4** 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$

Solução. Note que
$$\frac{1}{3^n+1}<\frac{1}{3^n},$$

então
$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

Ou seja $s_n<\frac{1}{2}$ é limitada e crescente (pois $s_n=s_{n-1}+\frac{1}{3^n+1}>s_{n-1}$). Assim s_n converge, e $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$ converge também. ;-)

2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Solução. $\ln n<n$ para $n\ge 2$. Assim $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, e
$$s_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}>\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=t_n.$$

Mas a sequência $\{t_n\}$ não é limitada, pois $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Portanto, $\{s_n\}$ é crescente e não limitada, e a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ diverge. ;-)

O exemplo anterior pode ser generalizado:

Teorema 3.3.1 — Teste de comparação. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ tais que
$$0\le x_n\le y_n,\quad n\ge p.$$

Então: 1) Se $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge também.

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ diverge também.

Demonstração. Lembra que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e só se $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$ converge, assim basta analisar apenas $\sum_{n=p}^{\infty} x_n$. Sejam $s_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$, $t_n = \sum_{k=p}^{n} y_k$ e $T = \sum_{k=p}^{\infty} y_k$. Como $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ temos que $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ crescem ($s_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$).

1) Temos $t_n \to t$ se $n \to \infty$, logo $t_n = \sum_{k=p}^{n} y_k \leq \sum_{k=p}^{\infty} y_p = t$. Como $x_n \leq y_n$, $n \geq p$, concluímos

$$\sum_{k=p}^{n} x_n \leq \sum_{k=p}^{n} y_n \leq \sum_{k=p}^{\infty} y_k = t,$$

ou seja $s_n \leq t_n \leq t$. Portanto $\{s_n\}$ é crescente e limitada. Então $\{s_n\}$ converge e $\sum_{k=p}^{\infty} x_n$ converge.

2) Temos $s_n \to \infty$ se $n \to \infty$, pois $\{s_n\}$ é crescente. Como $x_n \leq y_n$, $n \geq p$, obtemos $\sum_{k=p}^{n} x_k \leq \sum_{k=p}^{n} y_k$ ou $s_n \leq t_n$. Sequência $\{t_n\}$ é crescente e não limitada, portanto $t_n \to \infty$ ou $\sum_{k=p}^{\infty} y_n$ diverge. ■

■ **Exemplo 3.5** 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$.

Solução. Sabemos que $\operatorname{sen} x \leq x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Assim $\operatorname{sen} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Portanto

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, pelo Teorema 3.3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n}$ converge. ;-)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{7n^3 + 5n + 1}$.

Solução. Temos

$$\frac{4}{7n^3 + 5n + 1} \leq \frac{4}{7n^3}, \quad n \geq 1.$$

Além disso a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{7n^3} = \frac{4}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{7n^3 + 5n + 1}$$

converge. ;-)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n + 1}$.

Solução. Temos $\frac{n^2}{n^3 + n + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}$. Note que

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 3, \quad n \geq 1,$$

então

$$\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \geq \frac{1}{3n}.$$

Série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n}$ diverge, logo pelo Teorema 3.3.1 a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+n+1}$ diverge também.

;-)